FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE

KOLEGIJ: ***Matematičke metode u kemijskom inženjerstvu***

PARCIJALNE

DIFERENCIJALNE

JEDNADŽBE

IME I PREZIME: Marijo Lalić
BR. INDEKSA: 357

PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

Parcijalne diferencijalne jednadžbe proizlaze iz raznih problema u fizici i u geometriji kada funkcije koje promatramo zavise o dvije ili više nezavisnih varijabli. Te varijable mogu biti vrijeme i jedna ili više prostornih koordinata.
Ovaj rad će biti posvećen nekim najvažnijim parcijalnim diferencijalnim jednadžbama koje se pojavljuju u primjenama. Izvest$i$ ćemo ih iz fizikalnih $principa – načela$ i razmotriti metode za rješavanje problema sa rubnim uvjetima.

1. OSNOVE

Jednadžba u kojoj se nalazi jedna ili više parcijalnih derivacija (nepoznate) funkcije naziva se parcijalna diferencijalna jednadžba (PDJ). Red najveće derivacije naziva se red jednadžbe.

Kao i u slučaju obične diferencijalne jednadžbe ,$kažemo da je PDJ linearna ako je prvog stupnja u varijabli i svim parcijalnim derivacijama. Ako svaki izraz u jednadžbi sadrži varijablu ili neku parcijalnu derivaciju kaže se da je jednadžba homogena, u suprotnom je nehomogena.
Primjeri nekih važnijih PDJ-i drugog reda su:

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ jednodimenzionalna valna jednadžbe

(2) $$\frac{\delta u}{\delta t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ jednodimenzionalna toplinska jednadžba

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ dvodim. Laplaceova jednadžba

(4) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$ dvodim. Poissonova jednadžba

(5) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$ trodim. Laplaceova jednadžba

U ovim primjerima c je konstanta, t je vrijeme, a x, y, z su Kartezijeve koordinate. Za $f \neq 0$ jednadžba (4) je nehomogena , dok su sve ostale homogene.
Rješenje PDJ-a na nekom području R prostora nezavisnih varijabli je funkcija koja ima sve parcijalne derivacije koje se pojavljuju u jednadžbi i te parcijalne derivacije zadovoljavaju jednadžbu na cijelom R.

Općenito ukupan broj rješenja PDJ-a je vrlo velik.
Npr., funkcije:

$$u = x^2 - y^2$$
$$u = e^x \cos y$$
$$u = \ln(x^2 + y^2)$$

koje su međusobno potpuno različite$,$su rješenja dvodimenzionalna Laplaceove jednadžbe.

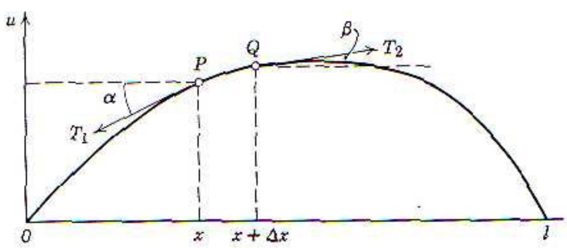
Kasnije ćemo vidjeti da će se jedinstveno rješenje PDJ-a koje odgovara nekom fizikalnom problemu dobiti koristeći dodatne uvjete koji proizlaze iz prirode problema. Npr. u nekim slučajevima će biti zadane vrijednosti rješenja na rubu neke domene (rubni uvjeti), dok će u drugim slučajevima, kada je vrijeme jedna od varijabli, vrijednosti rješenja za $t=0$ biti zadana$(početni uvjeti).

Znamo da ako je obična diferencijalna jednadžba linearna i homogena, onda se iz poznatih rješenja nova mogu dobit$i$ superpozicijom. Za PDJ-e također vrijedi:

Teorem 1.
Ako su u_1, u_2 rješenja neke homogene linearne PDJ na nekom području tada je i $u = c_1u_1 + c_2u_2$, gdje su c_1 i c_2 konstante, također rješenje te jednadžbe na tom području.

2. VIBRIRAJUČA NIT. JEDNODIMENZIONALNA VALNA JEDNADŽBA

Kao prvi važan primjer PDJ-a izvedimo jednadžbu malih poprečnih titraja elastične niti koja je rastegnuta na duljinu l i učvršćena na krajevima. Neka je nit iskrivljena u trenutku $t=0$, zatim otpuštena i puštena da vibrira. Zadatak je odrediti vibraciju tj. pronaći otklon $u(t,x)$ u točki x i vremenu t (slika1.). Kada izvodimo jednadžbu za neki fizikalni problem obično moramo uzeti pojednostavljujuće pretpostavke kako nam dobivena jednadžba ne bi bila prekomplicirana .



Slika 1. Vibrirajuća nit

U ovom slučaju pretpostaviti ćemo slijedeće:

1.) Masa niti po jedinici duljine je konstantna(homogena) nit. Nit je savršeno elastična i ne pruža otpor savijanja.
2.) Napetost uzrokovana rastezanjem toliko je velika da možemo zanemariti učinak gravitacije
3.) Pomicanje niti je mala poprečna vibracija u vertikalnoj ravnini tj. svaka čestica niti kreće se strogo vertikalno te je nagib na bilo kojem dijelu niti malen po apsolutnoj vrijednosti.

Ove pretpostavke su takve da možemo očekivati da će rješenje $u(x,t)$ dobivene PDJ dovoljno dobro opisivati vibraciju stvarne$(neidealizirane) niti.

Kako bismo dobili diferencijalnu jednadžbu promotrimo sile koje djeluju na mali dio niti (slika1.) . Kako nema otpora savijanja, napetost je tangencijalna na krivulju niti. Neka su T_1 i T_2 napetosti u krajnjim točkama P i Q promatranog dijela niti. Kako nema kretanja u horizontalnom smjeru, horizontalne komponente napetosti moraju biti konstantne. Koristeći vektore prikazano na slici dobivamo:

(1)
$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T = const.$$

U vertikalnom smjeru imamo dvije sile :

$$-T_1 \sin\alpha \text{ i } T_2 \sin\beta;$$

predznak minus pojavljuje se jer je komponenta u točki P usmjerena prema dolje. Po drugom Newtonovom zakonu rezultanta tih dviju sila jednaka je masi $\rho\Delta x$ promatranog dijela niti pomnoženog sa akceleracijom $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ u nekoj točki između x i $x+\Delta x$. Ovdje je ρ masa nedeformirane niti po jedinice duljine, a Δx je duljina promatranog dijela niti. Dakle :

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

koristeći (1) dobivamo:

(2)
$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$\tan\alpha$ i $\tan\beta$ su nagibi krivulje niti u x i $x+\Delta x$,odnosno:

$$\tan\alpha = \left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)_x \text{ i } \tan\beta = \left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)_{x+\Delta x}$$

Derivacije su parcijalne jer ovisi u u ovisi i o t. Dijeleći (2) s Δx dobivamo:

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)_x\right] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Kada $\Delta x \to 0$ dobivamo linearnu homogenu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu:

(3)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{gdje je } c^2 = \frac{T}{\rho}$$

Ovaj izraz predstavlja jednodimenzionalnu valnu jednadžbu.

3. SEPARACIJA$VARIJABLI (METODA PRODUKTA)

Vidjeli smo da titranje elastične niti zadovoljava jednadžba:

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{gdje je} \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

Kako je nit učvršćena na krajevima $x = 0$ i $x = l$ imamo dva rubna uvjeta:

(2) $$u(0,t)=0\,,\; u(l,t)=0 \qquad \forall\, t$$

Oblik gibanja niti ovisit$i$ će o početnoj deformaciji *f(x)* u *t=0* i početnoj brzini *g(x)*. Dakle imamo i dva početna uvjeta:

(3) $$u(x,0) = f(x)$$

i

(4) $$\frac{\delta u}{\delta t}\Big|_{t=0} = g(x)$$

Naš zadatak je pronaći rješenje jednadžbe koja zadovoljava gornje uvjete.

KORAK 1: Metodom separiranih varijabli dobit ćemo dvije obične diferencijalne jednadžbe. Metoda separiranih varijabli daje rješenja od (1) u obliku:

(5) $$u(x,t) = F(x)G(t)$$

koja su produkti dviju funkcija svaka sa jednom varijablom. Deriviranjem izraza$(5) dobivamo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G} \;\text{ i }\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

gdje točkice označavaju derivacije po t , a crtice po x. Uvrštav$ajući-njem$ ovog izraza u (1) imamo:

$$F\ddot{G} = c^2 F''G$$

dijeleći s $c^2 FG$ dobivamo:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F}$$

Lijeva strana jednakosti ovisi samo o *t* , desna samo o *x*. Dakle oba izraza moraju biti jednaka nekoj konstanti *k*

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$$

$I-i$z čega odmah dobivamo dvije obične diferencijalne jednadžbe:

(6) $$F'' - kF = 0$$

(7) $$\ddot{G} - c^2 kG = 0$$

U ovim jednadžbama k je još uvijek proizvoljan.

KORAK 2: Odredit$i$ ćemo rješenje običnih diferencijalnih jednadžbi koje zadovoljavaju rubne uvjete.
Odredit$i$ ćemo F i G tako da $u=FG$ zadovoljava:

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0 \ , \ u(l,t) = F(l)G(t) = 0 \quad \forall t$$

Očito ako je $G=0$, onda je i $u=0$ što nije $interesantno- zanimljivo$,$dakle $G \neq 0$.
Zbog toga imamo:

(8) $$F(0)=0 \ , \ F(l)=0$$

Za $k=0$ općenito rješenje je $F = ax + b$, pa imamo i $F=0$ što je također $neinteresantno$.
Za pozitivni $k = \mu^2$ opće rješenje je $F = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$,$pa ponovno iz rubnih uvjeta imamo $F=0$
Dakle ostaje nam da je $k<0$ tj. $k=-p^2$, pa dobivamo:

$$F'' + p^2 F = 0$$

što ima opće rješenje:

$$F(x) = A\cos px + B\sin px$$

Iz početnih uvjeta :

$$F(0) = A = 0 \ \text{ i } \ F(l) = B\sin pl = 0$$

$U-u$zimamo da je $B \neq 0$ jer bi u protivnom bilo $F=0$, dakle $\sin pl$ =0,$odakle je:

(9) $$p = \frac{n\pi}{l} \qquad n \in □ \ $$

Za $B=1$ dobivamo beskonačno mnogo rješenja:

(10) $$F_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad n \in □ \ $$

Sada je k ograničen na vrijednosti$(uzimajući u obzir (7)) :

$$k = -p^2 = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

Za takve k-ove dobivamo$(transformacijom (7)) jednadžbe:

$$\ddot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \quad ; \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

Opće rješenje je:

$$G_n(t) = B_n \cos 2nt + B_n^* \sin \lambda_n t$$

Sada koristeći da je :

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t)$$

dobivamo izraz:

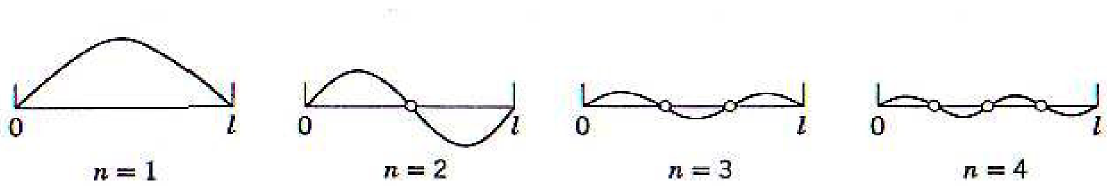
(11) $$u_n(x,t) = (B_n \cos\lambda_n t + B_n^* \sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad n\in \Box$$ $$

koji predstavlja rješenja početne jednadžbe (1) koja zadovoljavaju rubne uvjete (2). Ove funkcije zovu se svojstvene funkcije ili karakteristične funkcije, a koeficijenti $\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$ su svojstvene vrijednosti ili karakteristične vrijednosti vibrirajuće niti. Skup $\{\lambda_n \,|\, n\in \Box\}$ $$zove se spektar.

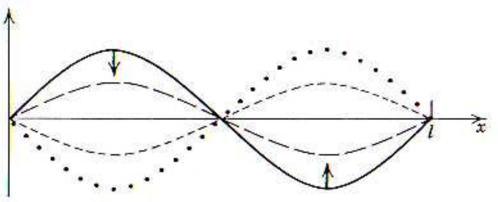
Vidimo da svaki u_n $predstavlja-opisuje????$ harmoni$čko-jsko$ $kretanje-gibanje$ frekvencije $\frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{cn}{2l}$ ciklusa u jedinici vremena. To $kretanje$ se zove n-ti normalni mod niti. Za n=1 govorimo o temeljnom modu. Kako je

$$\sin\frac{n\pi x}{l} = 0 \quad \text{za } x = \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}l$$

n-ti normalni mod ima *n-1* čvor tj. fiksnu točku niti (slika 2.).



Slika 2. Normalni modovi vibrirajuće niti



Slika 3. Drugi normalni mod za različite vrijednosti t

Slika 3. prikazuje drugi normalni mod za različita vremena *t*. Nit ima oblik si$m-n$usoidnog vala. Kada se lijevi dio niti pomi$ć-č$e dol$j$e, drugi dio niti se pomi$ć-č$e prema gore. Vrijedi i obratno.
Za ostale modove vrijedi slično ponašanje.

KORAK 3: Sada ćemo uključiti i početni uvjet.

Kako je početna jednadžba linearna i homogena iz TEOREMA 1. imamo da je suma od konačno mnogo rješenja u_n također rješenje.
Kako bi\$smo\$ dobili rješenje koje zadovoljava početne uvjete promotrimo red:

(12) $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos\lambda_n t+B_n^*\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

Zbog (3) imamo:

(13) $$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x)$$

Dakle, koeficijenti B_n moraju biti izabrani tako da *u(x,0)* \$podnese???\$ razvoj u Fourierov red od *f(x)* imamo:

(14) $$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad n\in \square \ \$\$$$

Slično deriviranjem (12) po *t*, tako da je zadovoljen uvjet (4) dobivamo:

$$\frac{\delta u}{\delta t}\Big|_{t=0}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-B_n\lambda_n\sin\lambda_n t+B_n\lambda_n\cos\lambda_n t)\sin\frac{n\pi x}{l}\right]\Big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\lambda_n\sin\frac{n\pi x}{l}=g(x)$$

Dakle B_n^* moramo izabrati tako da za *t=0,* $\frac{\delta u}{\delta t}$ bude Fourierov red od *g(x).*

$$B_n^*\lambda_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

ili, pošto je $\lambda_n=\frac{cn\pi}{l}$ imamo:

(15) $$B_n^*=\frac{2}{cn\pi}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad n\in \square \ \$\$$$

Slijedi da je u(x,t) rješenje početne jednadžbe koje zadovoljava rubne i početne uvjete pod uvjetom da red (12) konvergira i da konvergiraju redovi dobiveni deriviranjem reda (12) dvaput\$(po članovima) s obzirom na *x* i *t* i imaju sume $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ koje su neprekidne.
Dakle rješenje (12) je čisto formalni izraz i tek ga trebamo potvrditi. Zbog jednostavnosti pogledajmo samo slučaj kada je *g(x)=0*. Tada je $B_n^*=0$ i izraz (12) se reducira na:

(16) $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos\lambda_n t\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad \lambda_n=\frac{cn\pi}{l}$$

Moguće je sumirati red tj. napisati ga u konačnoj ili zatvorenoj formi.
Koristeći:

$$\cos\frac{cn\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x=\frac{1}{2}\left[\sin\left\{\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right\}+\sin\left\{\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right\}\right]$$

za izraz (16)$dobivamo:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left\{\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right\}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left\{\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right\}$$

Gornja dva reda dobivena su zamjenom *x-ct* i $*x+ct* u Furierov razvoj od *f(x)* pa je:

(17)
$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f^*(x-ct)+f^*(x+ct)\right]$$

gdje je f^* neparno period$ičko-no$ proširenje od *f* s periodom 2l (slika 4.).

Slika 4. Neparno period$ičko-no$ proširenje od f(x)

Kako je *f(x)* neprekidna na $[0,l]$ i jednaka nuli u rubnim točkama iz$???$ slijedi da je i $u(x,t)$ neprekidna. Derivirajući vidimo da je $u(x,t)$ rješenje ako je *f*(x) dvaput diferencijabilna na $\langle 0,l\rangle$ i ima jednostrane druge derivacije u $x=0 i x=l – font??$ koje su jednake nuli. Pod ovim uvjetima $u(x,t)$ je rješenje koje zadovoljava rubne i početne uvjete. Ako su $f'(x)$ i $f''(x)$ samo djelomično neprekidne ili ako jednostrane derivacije nisu nula, tada će za svaki *t* postojati konačno mnogo vrijednosti od *x* za koje druga derivacija od *u* ne postoji. Osim u tim točkama valna jednadžba će biti zadovoljena, a $u(x,t)$ možemo smatrati rješenjem problema u širem smislu.

4. D' ALAMBERTOVO RJEŠENJE VALNE JEDNADŽBE

Zanimljivo je primijetiti da rješenje iz prethodnog poglavlja možemo $direktno-izravno$ dobiti transformacijom te jednadžbe

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{gdje je} \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

na pogodan način, točnije uvodeći nove nezavisne varijable:

(2) $$v = x + ct\,,\ z = x - ct$$

Tada u postaje funkcija od v i z , a derivacija u (1) mogu se izraziti preko derivacije s obzirom na v i z .Također koristimo $v_x = 1, z_x = 1$

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + u_z$$
$$u_{xx} = (u_v + u_z)_x = (u_v + u_z)_v v_x + (u_v + u_z)_z z_x$$
$$u_{xx} = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}$$
$$u_{tt} = c^2 (u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz})$$

Umetanjem ovih rezultata u (1) dobivamo:

(3) $$u_{vz} = \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0$$

Integriranjem po z dobijemo:

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v)$$

gdje je *h(v)* neka funkcija od v. Integriranjem po v dobiva se:

$$u = \int h(v) dv + \psi(z)$$

gdje je $\psi(z)$ neka funkcija po z.
Kako je integral funkcija od v imamo:

$$u = \phi(v) + \psi(z)$$

Zbog (2) imamo:

(4) $$u(x,t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

i to je d' Alambertovo rješenje valne jednadžbe. Funkcije ϕ i ψ mogu se odrediti iz početnih uvjeta.
Ilustrirajmo to u slučaju kada je početna brzina nula, a početna deformacija $u(x,0) = f(x)$.
Diferenciramo izraz (4) i dobivamo:

(5)
$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\phi'(x+ct) - c\psi'(x-ct)$$

gdje crtice označavaju derivaciju s obzirom na cijeli argument. Iz (4) i (5) te početnih uvjeta imamo:

$$u(x,0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x)$$
$$u_t(x,0) = c\phi'(x) - c\psi'(x) = 0$$

Iz posljednje jednadžbe je $\phi' = \psi'$ tj. $\psi = \phi + k$, a iz ovoga i prve jednadžbe:

$$\phi = \frac{f-k}{2}$$

S ovakvim ϕ i ψ rješenje (4) postaje:

(6)
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right]$$

5. JEDNODIMENZIONALNI TOPLINSKI TOK

Toplinski tok u homogenom tijelu zadovoljava toplinsku jednadžbu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\nabla^2 u \quad , \quad c^2 = \frac{K}{\sigma\rho}$$

gdje je $u(x,y,z,t)$ temperatura tijela, K toplinska vodljivost, σ specifična toplina i ρ gustoća tijela. ∇^2 je Laplaceov operator te imamo da je :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Slika 5. Promatrana šipka$(žica)

Kao važan primjer promotrimo temperaturu u dugoj, tankoj šipci ili žici konstantnog presjeka ,$od homogen$og-a$ materijala koji je orijentiran uzduž *x* –osi, te je bočno potpuno izoliran$(slika 5.), tako da toplina protječe samo u smjeru *x* –osi. Tada *u* ovisi samo o *x* i vremenu *t* i toplinska jednadžba postaje jednodimenzionalna toplinska jednadžba:

(1)
$$\frac{\delta u}{\delta t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dok u valnoj jednadžbi imamo drugu parcijalnu derivaciju od *u* po *t*, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ u toplinskoj jednadžbi pojavljuje se prva parcijalna derivacija $\frac{\partial u}{\partial t}$. Vidjet$i$ ćemo da se rješenja toplinske jednadžbe u potpunosti razlikuju od rješenja valne jednadžbe iako se i jedna i druga

rješavaju metodom separiranih varijabli. Riješit$i$ ćemo toplinsku jednadžbu za neke važne tipove rubnih i početnih uvjeta.
Počnimo sa slučajem kada se krajevi *x=0* i *x=l* drže na temperaturi $od nula???$. Tada su rubni uvjeti :

(2) $$u(0,t)=0 \quad u(l,t)=0 \quad \forall t$$

Neka je *f(x)* početna temperatura šipke. Tada je početni uvjet

(3) $$u(x,0)=f(x)$$

gdje je *f(x)* zadana funkcija.
Odredimo rješenje toplinske jednadžbe$(2) koje zadovoljava gornje uvjete (2) i (3).

KORAK 1: Odredimo rješenja koja zadovoljavaju rubne uvjete koristeći metodu separiranih varijabli. Počinjemo od:

(4) $$u(x,t)=F(x)G(t)$$

Deriviranjem i uvrštavanjem u početnu jednadžbu (1) dobivamo:

$$F\dot{G}=c^2F''G$$

dijeleći s c^2FG dobivamo:

(5) $$\frac{\dot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F}$$

Izraz na lijevoj strani ovisi samo o *t,* dok izraz na desnoj strani ovisi samo o *x* pa zaključujemo da su oba izraza jednaka nekoj konstanti k. Lagano se pokazuje da za $k \geq 0$ jedino rješenje *u=FG* koje zadovoljava rubne uvjete je *u=0.*
Za negativni $k=-p^2$ imamo:

$$\frac{\dot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F}=-p^2$$

a odavde dvije obične diferencijalne ODJ:

(6) $$F''+p^2F=0$$

i

(7) $$\dot{G}+c^2p^2G=0$$

KORAK 2: Uzimamo da je opće rješenje od (6):

(8) $$F(x)=A\cos px+B\sin px$$

Iz rubnih uvjeta (2) imamo:

$$u(0,t)=F(0)G(t)=0$$

i

$$u(l,t)=F(l)G(t)=0$$

Kako *G=0* implicira *u=0* zahtijevamo *F(0)=0* i *F(l)=0*. *F(0)=A*, pa je *A=0*, pa slijedi:

$$F(l) = B\sin pl$$

$B \neq 0$ jer bi inače bilo *F=0* . Dakle uvjet F(l)=0 povlači:

$$\sin pl = 0$$

odnosno

$$p = \frac{n\pi}{l} \qquad n \in \mathbb{N} \ \$\$$$

Za B=1 imamo rješenja:

$$F_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad n \in \mathbb{N} \ \$\$$$

jednadžbe (6) koja zadovoljavaju rubne uvjete (2).

Za $p = \dfrac{n\pi}{l}$ druga ODJ (7) poprima oblik:

$$\dot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \quad \text{gdje je } \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

Opće rješenje je :

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t} \qquad n \in \mathbb{N} \ \$\$$$

gdje je B_n konstanta.

Prema tome funkcije:

(9) $$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = B_n \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t} \qquad n \in \mathbb{N} \ \$\$$$

su rješenja toplinske jednadžbe (1) koja zadovoljava rubne uvjete (2).

KORAK 3: Kako bi pronašli rješenja koja zadovoljavaju i početne uvjete promotrimo red:

(10) $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{npx}{l} e^{-\lambda_n^2 t} \quad ; \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

Odavde i iz početnog uvjeta (3) imamo:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} = f(x)$$

Dakle, B_n su koeficijenti u Fourierovom razvoju od *f(x)* ;

(11) $$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad n \in \mathbb{N} \ \$\$$$

Rješenja postoje ako je *f(x)* po dijelovima neprekidna na segmentu $[0,l]$, te ima jednostrane derivacije u svim točkama intervala $\langle 0,l \rangle$, tj. $P-p$od ovim uvjetima red (10) s koeficijentima (11) je rješenje promatranog fizikalnog problema.

6. TOPLINSKI TOK U BESKONAČNOJ ŠIPCI

Sada ćemo promatrati rješenje toplinske jednadžbe:

(1) $$\frac{\delta u}{\delta t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

u slučaju kada se šipka proteže u beskonačnost na obje strane (te je kao i prije bočno izolirana). U ovom slučaju nemamo rubnih uvjeta nego samo početni uvjet:

(2) $$u(x,0) = f(x) \qquad x \in \square \ \$\$$$

gdje $f(x)$ zadana početna temperatura šipke.
Kako bi riješili ovu jednadžbu počinjemo kao i u prethodnom odjeljku. Uvrstimo $u(x,t) = F(x)G(t)$ u početnu jednadžbu(1) dobijemo dvije ODJ:

(3) $$F'' + p^2 F = 0$$

i

(4) $$\dot{G} + c^2 p^2 G = 0$$

Funkcije:

$$F(x) = A\cos px + B\sin px$$

i

$$G(t) = e^{-c^2 p^2 t}$$

su rješenja tih običnih diferencijalnih jednadžbi, gdje su $A i B – font??$ proizvoljne konstante.
Slijedi da je:

(5) $$u(x,t;p) = FG = (A\cos px + B\sin px)e^{-c^2 p^2 t}$$

je rješenje početne jednadžbe (1).

Kao i u prethodnom odjeljku morali smo konstantu $k = -p^2$ odabrati tako da bude negativna jer bi u suprotnom za rješenje imali rastuću eksponencijalnu funkciju koja nema nikakvo fizikalno značenje.

Bilo koji red funkcije (5)$dobiven uzimajući za *p* višekratnike nekog fiksnog broja dao bi funkciju koja je period$ična-na$ u *x* za *t=0*. Kako *f(x)* općenito nije period$ična-na$ prirodno je u ovom slučaju koristiti Fourierov integral umjesto Fourierovog reda.
Kako su $A i B- font?$ proizvoljni možemo ih smatrati funkcijama od $p-font?$ i pisati *A=A(p)* i *B=B(p)*.
Kako je toplinska jednadžba homogena i linearna, funkcija:

(6) $$u(x,t)=\int_0^{\infty}u(x,t;p)dp=\int_0^{\infty}\left[A(p)\cos px+B(p)\sin px\right]e^{-c^2p^2t}dp$$

je rješenje toplinske jednadžbe.
Iz (6) i početnog uvjeta(2) slijedi:

(7) $$u(x,0)=\int_0^{+\infty}\left[A(p)\cos px+B(p)\sin px\right]dp=f(x)$$

Odakle je:

(8) $$A(p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)\cos pvdv\ ,\ B(p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)\sin pvdv.$$

Pa je:

$$u(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)\cos(px-pv)dv\right]dp$$

(6) postaje:

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)\cos(px-pv)e^{-c^2p^2t}dv\right]dp$$

Uz pretpostavku da možemo promijeniti poredak integracije dobivamo:

(9) $$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)\left[\int_0^{+\infty}e^{-c^2p^2t}\cos(px-pv)dp\right]dv$$

Unutrašnji integral računamo pomoću formule:

(10) $$\int_0^{+\infty}e^{-s^2}\cos 2bsds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$$

Za $s=cp\sqrt{t}$ i $b=\dfrac{x-v}{2c\sqrt{t}}$ imamo da izraz (10) postaje:

$$\int_0^{+\infty}e^{-c^2p^2t}\cos(px-pv)dp=\frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}}$$

Uvrštavajući to u izraz (9) dobivamo:

(11) $$u(x,t)=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)e^{\frac{-(x-v)^2}{4c^2t}}dv$$

Konačno, uvođenjem nove varijable integracije:

$$w = \frac{v - x}{2c\sqrt{t}}$$

dobivamo:

(12) $$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + 2wc\sqrt{t}) e^{-w^2} dw$$

Ako je *f(x)* ograničena na □ $$ i integrabilna na svakom konačnom segmentu može se dokazati da je (12)$rješenje toplinske jednadžbe$(1) koje zadovoljava početni uvjet (2).